COLEGIO JUAN DE LA CIERVA

IN NOVA ACCIÓN

VIII

OLIMPIADA MATEMÁTICA

4º ESO

ACADÉMICAS

SEPTIEMBRE/2023

Ejercicio nº 1.-

Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales, irracionales y/o reales:

$$\frac{6}{3};\quad \frac{3}{6};\quad \sqrt{2};\quad 4{,}5;\quad -4;\quad \frac{\sqrt{5}}{2};\quad \sqrt{49};\quad 2{,}444\ldots$$

Ejercicio nº 2.-

I) Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x\,/\,x > -1\}$

b) $\{x\,/\,-1 < x < 0\}$

II) Escribe en forma de desigualdad y representa:

a) $[3,\ 5)$

b) $(3,\ +\infty)$

Ejercicio nº 3.-

a) Opera y simplifica: $\sqrt{24} + \frac{1}{2}\sqrt{54} - \sqrt{600}$

b) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Ejercicio nº 4.-

Sabiendo que $log\ a = 1{,}2;\ \ log\ b = 0{,}1$ **y** $log\ c = 0{,}6$ **halla** $log\sqrt{\dfrac{a \cdot b}{c^3}}$.

Ejercicio nº 5.-

a) Opera y simplifica:

$$\left(x+2\right)^2 - 3\left(x^2 - 2x + 4\right)$$

b) Halla el cociente y el resto de esta división:

$$\left(4x^5 + 2x^3 - 3x + 1\right) : \left(x^2 - 2\right)$$

Ejercicio nº 6.-

Factoriza el siguiente polinomio:

$$x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$$

Ejercicio nº 7.-

Opera y simplifica:

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x} - \dfrac{2x}{x+1}$

b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x}{x+1}$

Ejercicio nº 8.-

Resuelve:

a) $\sqrt[3]{25}=5^{x^2-\frac{1}{3}}$

b) $log_2\left(6x+\frac{7}{4}\right)=-2$

Ejercicio nº 9.-

Resuelve este sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$$

Ejercicio nº 10.-

Carlos y Elvira tienen, entre los dos, 108 €. Si Elvira le diera a Carlos 7 €, entonces Carlos tendrá la mitad del dinero que tendría Elvira. Averigua cuánto dinero tiene cada uno.

Ejercicio nº 11.-

Resuelve y representa gráficamente las soluciones:

a) $x^2 + x \geq 3(x+1)$

b) $\begin{cases} 5(x+3) + 4x \leq 3(4x-2) \\ 3(x-8) < 2(4+x) + 3x \end{cases}$

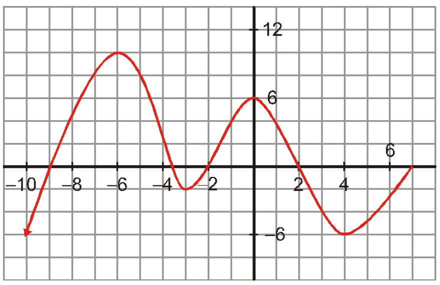
<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Observa la gráfica de la función y responde:

a) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

b) ¿En qué intervalos crece y en cuáles decrece?

c) ¿Tiene máximo y mínimo? En caso afirmativo, ¿cuáles son?



<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Marta sale de su lugar de trabajo a las 8 de la tarde en bicicleta y se dirige a un supermercado situado a 600 m de su trabajo, tardando en llegar 10 minutos. Después de permanecer allí un cuarto de hora, se va a un restaurante que hay a 1 km del supermercado, tardando 20 minutos en el recorrido. Tras estar 2 horas cenando con unos amigos, se va a su casa situada a 2400 m del restaurante. Llega a su casa a las 11 y media de la noche.

Representa la gráfica *tiempo*−*distancia*.

Ejercicio nº 14.-

Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

b) $y = \sqrt{3-9x}$

Ejercicio nº 15.-

Representa gráficamente la recta $y = -2x + 1$ y halla la ecuación de la recta con la misma pendiente que la anterior que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(-3, 0)$ y $B(1, -8)$.

Ejercicio nº 16.-

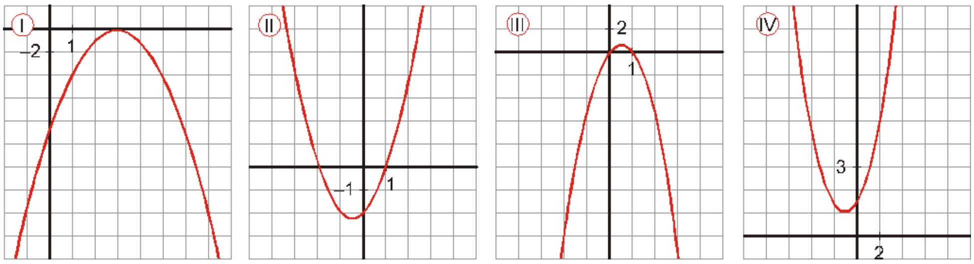
Asocia cada gráfica con su correspondiente expresión:

a) $y = -3x^2 + 3x$

b) $y = -(x-3)^2$

c) $y = \dfrac{(x+1)^2}{2} + 1$

d) $y = (x-1)(x+2)$



<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Representa esta función:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x\le -1\\ -2x^2+5 & \text{si} \quad -1<x\le 1\\ 3 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

Representa las siguientes funciones:

a) $y=|2x-3|$

b) $y=-\dfrac{1}{x-3}$

<u>Ejercicio nº 19.-</u>

Representa las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x-2}$

b) $y=3^x$

Ejercicio nº 20.-

Calcula *sen* α y *tg* α de un ángulo agudo, α, sabiendo que *cos* $\alpha = 0,6$.

Ejercicio nº 21.-

Calcula las razones trigonométricas de 227° a partir de las razones trigonométricas de 47°:

***sen* 47° = 0,73; *cos* 47° = 0,68; *tg* 47° = 1,07**

Ejercicio nº 22.-

Un globo, sujeto al suelo por una cuerda, se encuentra a una altura de 7,5 m; entre la altura y la cuerda se forma un ángulo de 54°. Calcula la longitud de la cuerda y el ángulo que esta forma con el suelo.

Ejercicio nº 23.-

Para subir a una atracción de feria hay una escalera y una rampa. La rampa mide 15 m y los ángulos que forman la rampa y la escalera con el suelo son de 48º y 30º. Calcula la longitud de la escalera, la separación que existe entre ambos accesos y la altura entre el suelo y el punto donde coinciden, así como el ángulo que forman entre sí.

Ejercicio nº 24.-

Determina las coordenadas del vector que pasa por los puntos *A*(–2, –3) y *B* (4, 1), represéntalo en unos ejes cartesianos y calcula su módulo.

Ejercicio nº 25.-

Dados los vectores $\vec{u}(-1, 2)$, $\vec{v}(1, 1)$ y $\vec{w}(4, 1)$, calcula analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

b) $\vec{u}-3\vec{v}$

Ejercicio nº 26.-

a) Escribe dos vectores que tengan la misma dirección, sentido contrario y módulo menor que $\vec{u}(-6, 2)$.

b) Escribe tres vectores perpendiculares a $\vec{u}$.

Ejercicio nº 27.-

Halla el punto medio del segmento de extremos *A*(1, −4) y *B*(6, −8).

Ejercicio nº 28.-

Halla el simétrico, *P′*, del punto *P*(2, −4) respecto de *Q*(6, 3).

Ejercicio nº 29.-

Halla la distancia entre los puntos $A(10, 15)$ y $B(0, -9)$.

Ejercicio nº 30.-

a) Determina si los puntos $A(2, -2)$, $B(4, -6)$ y $C(-3, 8)$ están alineados.

b) Halla x para que los puntos $P(1, -3)$, $Q(x - 3, 9)$ y $R(2, -7)$ estén alineados.

Ejercicio nº 31.-

a) Escribe la ecuación de la recta, r, que pasa por los puntos $(0, -2)$ y $(-1, -5)$.

b) Obtén la ecuación de la recta, s, que pasa por $(4, 0)$ y tiene pendiente -2.

c) Halla el punto de intersección de las rectas r y s.

Ejercicio nº 32.-

a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = \frac{1}{2}x + 3$.

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $2x + y = -3$.

Ejercicio nº 33.-

Determina analítica y gráficamente la posición relativa de las siguientes rectas:

r **: pasa por los puntos *A*(–2, 4) y *B*(–3, 2).**

$$s: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.-

Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales, irracionales y/o reales:

$$\frac{6}{3}; \quad \frac{3}{6}; \quad \sqrt{2}; \quad 4{,}5; \quad -4; \quad \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad \sqrt{49}; \quad 2{,}444...$$

Solución:

Naturales $\rightarrow$ $\frac{6}{3}; \quad \sqrt{49}$

Enteros $\rightarrow$ $\frac{6}{3}; \quad -4; \quad \sqrt{49}$

Racionales $\rightarrow$ $\frac{6}{3}; \quad \frac{3}{6}; \quad 4{,}5; \quad -4; \quad \sqrt{49}; \quad 2{,}444...$

Irracionales $\rightarrow$ $\sqrt{2}$; $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Reales $\rightarrow$ Todos

Ejercicio nº 2.-

I) Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x / x > -1\}$

b) $\{x / -1 < x < 0\}$

II) Escribe en forma de desigualdad y representa:

a) $[3,\ 5)$

b) $(3,\ +\infty)$

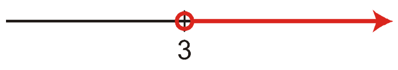
Solución:

I) a) $(-1,\ +\infty)$

b) $(-1,\ 0)$

II) a) $\{x \,/\, 3 \leq x < 5\}$

b) $\{x / x > 3\}$



Ejercicio nº 3.-

a) Opera y simplifica: $\sqrt{24}+\frac{1}{2}\sqrt{54}-\sqrt{600}$

b) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Solución:

a) $\sqrt{24}+\frac{1}{2}\sqrt{54}-\sqrt{600}=\sqrt{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 3^3}-\sqrt{2^3\cdot 3\cdot 5^2}=2\sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt{6}-10\sqrt{6}=-\frac{13}{6}\sqrt{6}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{6+\sqrt{6}}{12-2}=\dfrac{6+\sqrt{6}}{10}$

Ejercicio nº 4.-

Sabiendo que $log\ a = 1,2;\ \ log\ b = 0,1$ y $log\ c = 0,6$ halla $log\sqrt{\frac{a\cdot b}{c^3}}$.

Solución:

$$log\sqrt{\frac{a\cdot b}{c^3}} = log\left(\frac{a\cdot b}{c^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}log\ \frac{ab}{c^3} = \frac{1}{2}\left(log\ ab - log\ c^3\right) = \frac{1}{2}\left(log\ a + log\ b - 3log\ c\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1,2 + 0,1 - 3\cdot 0,6\right) = \frac{1}{2}\left(-0,5\right) = -0,25$$

Ejercicio nº 5.-

a) Opera y simplifica:

$$\left(x+2\right)^2 - 3\left(x^2 - 2x + 4\right)$$

b) Halla el cociente y el resto de esta división:

$$\left(4x^5 + 2x^3 - 3x + 1\right) : \left(x^2 - 2\right)$$

Solución:

a) $\left(x+2\right)^2 - 3\left(x^2 - 2x + 4\right) = x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + 6x - 12 = -2x^2 + 10x - 8$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^5 & +\ 2x^3 & -\ 3x & +\ 1 & x^2 - 2 \\ \cline{5-5} -\ 4x^5 & +\ 8x^3 & & & 4x^3 + 10x \\ \cline{1-4} & 10x^3 & -\ 3x & +\ 1 & \\ & -\ 10x^3 & +\ 20x & & \\ \cline{2-4} & & 17x & +\ 1 & \end{array}$$

Cociente = $4x^3 + 10x$

Resto = $17x + 1$

Ejercicio nº 6.-

Factoriza el siguiente polinomio:

$$\boldsymbol{x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2}$$

Solución:

− Sacamos x^2 factor común: $x^2\,(x^3 + 5x^2 - x - 5)$

− Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^3 + 5x^2 - x - 5$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & & 1 & 6 & 5 \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 0 \end{array}$$

-1		-1	-5
	1	5	0

Por tanto:

$x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 = x^2(x-1)(x+1)(x+5)$

Ejercicio nº 7.-

Opera y simplifica:

a) $\mathbf{\dfrac{3x^2+1}{x^2+x} - \dfrac{2x}{x+1}}$

b) $\mathbf{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1}}$

Solución:

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2+x} - \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{3x^2+1}{x(x+1)} - \dfrac{2x^2}{x(x+1)} = \dfrac{3x^2+1-2x^2}{x(x+1)} = \dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1} = \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2-1}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}\cdot\dfrac{x}{(x+1)} =$

$= \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$

Ejercicio nº 8.-

Resuelve:

a) $\sqrt[3]{25} = 5^{x^2 - \frac{1}{3}}$

b) $log_2\left(6x + \frac{7}{4}\right) = -2$

Solución:

a) Expresamos el primer miembro como potencia de 5:

$$\sqrt[3]{25} = 5^{x^2 - \frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{5^2} = 5^{x^2 - \frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad 5^{\frac{2}{3}} = 5^{x^2 - \frac{1}{3}}$$

Igualamos exponentes:

$$\frac{2}{3} = x^2 - \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{3} \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

Las soluciones son: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) Aplicamos la definición de logaritmo:

$$log_2\left(6x + \frac{7}{4}\right) = -2 \quad \rightarrow \quad 6x + \frac{7}{4} = 2^{-2} \quad \rightarrow \quad 6x + \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 6x = \frac{-6}{4} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$$

Comprobación de la solución

$$log_2\left[6\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{7}{4}\right]=log_2\left(\frac{-6}{4}+\frac{7}{4}\right)=log_2\frac{1}{4}=log_2\ 2^{-2}=-2$$

La solución $x=-\frac{1}{4}$ es válida.

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Resuelve este sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2+y^2=13} \\ \boldsymbol{xy=6} \end{cases}$$

Solución:

Despejamos *y* de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y=\frac{6}{x}$$

$$x^2+\left(\frac{6}{x}\right)^2=13 \quad\rightarrow\quad x^2+\frac{36}{x^2}=13 \quad\rightarrow\quad x^4+36=13x^2$$

Hacemos el cambio: $x^2=z \quad\rightarrow\quad x^4=z^2$

Así obtenemos:

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \quad \to \quad z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} z = 9 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 9 \quad \to \quad x^2 = 9 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \begin{cases} \text{Si } x = -3 \quad \to \quad y = -2 \\ \text{Si } x = 3 \quad \to \quad y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } z = 4 \quad \to \quad x^2 = 4 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \begin{cases} \text{Si } x = -2 \quad \to \quad y = -3 \\ \text{Si } x = 2 \quad \to \quad y = 3 \end{cases}$$

Ejercicio nº 10.-

Carlos y Elvira tienen, entre los dos, 108 €. Si Elvira le diera a Carlos 7 €, entonces Carlos tendrá la mitad del dinero que tendría Elvira. Averigua cuánto dinero tiene cada uno.

Solución:

$$\begin{aligned} x &= \text{"dinero que tiene Carlos"} \\ y &= \text{"dinero que tiene Elvira"} \end{aligned}$$

El sistema a resolver será:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 108 \\ x + 7 &= \frac{y - 7}{2} \end{aligned}\right\} \quad \to \quad \left.\begin{aligned} x + y &= 108 \\ 2x + 14 &= y - 7 \end{aligned}\right\}$$

Despejamos *y* de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\begin{aligned} &y = 108 - x \\ &y = 2x + 21 \quad \to \quad 108 - x = 2x + 21 \quad \to \quad 3x = 87 \quad \to \quad x = 29 \end{aligned}$$

Luego, $y = 108 - 29 = 79$.

Carlos tiene 29 €, y Elvira, 79 €.

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Resuelve y representa gráficamente las soluciones:

a) $x^2 + x \geq 3(x+1)$

b) $\begin{cases} 5(x+3) + 4x \leq 3(4x-2) \\ 3(x-8) < 2(4+x) + 3x \end{cases}$

Solución:

a) $x^2 + x \geq 3(x+1)$

$x^2 + x \geq 3x + 3$

$x^2 + x - 3x - 3 \geq 0$

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$

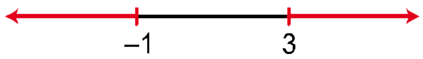
Resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $x^2 - 2x - 3$ en cada intervalo:

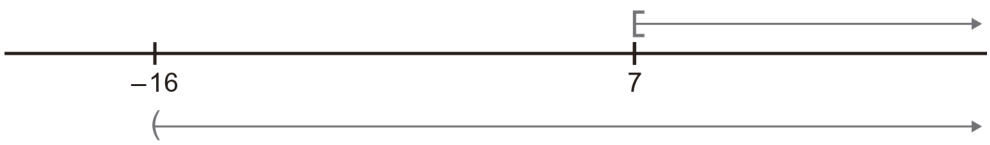
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $x^2 - 2x - 3$	$+$	$-$	$+$

La solución de la inecuación es $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.



b) $\begin{cases} 5(x+3)+4x \le 3(4x-2) \\ 3(x-8) < 2(4+x)+3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x+15+4x \le 12x-6 \\ 3x-24 < 8+2x+3x \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 9x+15 \le 12x-6 \\ 3x-24 < 8+5x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x \le -21 \\ -2x < 32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{-21}{-3} \\ x > \dfrac{32}{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ge 7 \\ x > -16 \end{cases}$



La solución del sistema es $[7, \infty)$.

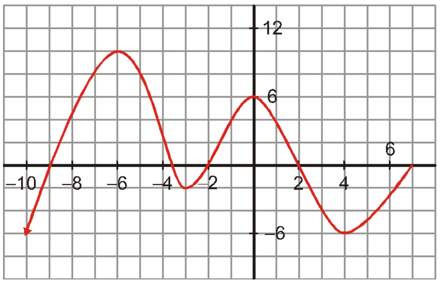
Ejercicio nº 12.-

Observa la gráfica de la función y responde:

a) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

b) ¿En qué intervalos crece y en cuáles decrece?

c) ¿Tiene máximo y mínimo? En caso afirmativo, ¿cuáles son?



Solución:

a) Dominio de definición: $(-\infty, 7]$; Recorrido: $(-\infty, 10]$

b) La función crece en los intervalos $(-\infty, -6)$, $(-3, 0)$ y $(4, 7)$; decrece en los intervalos

$(-6, -3)$ y $(0, 4)$.

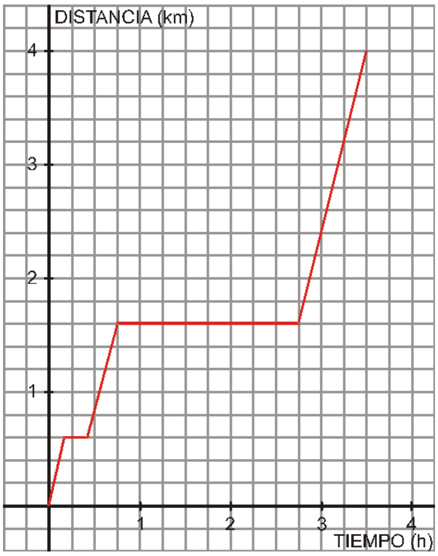
c) Tiene máximo, y se alcanza en el punto $(-6, 10)$. No tiene mínimo.

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Marta sale de su lugar de trabajo a las 8 de la tarde en bicicleta y se dirige a un supermercado situado a 600 m de su trabajo, tardando en llegar 10 minutos. Después de permanecer allí un cuarto de hora, se va a un restaurante que hay a 1 km del supermercado, tardando 20 minutos en el recorrido. Tras estar 2 horas cenando con unos amigos, se va a su casa situada a 2400 m del restaurante. Llega a su casa a las 11 y media de la noche.

Representa la gráfica *tiempo*–*distancia*.

Solución:



Ejercicio nº 14.-

Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

b) $y = \sqrt{3-9x}$

Solución:

a) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2+1} \rightarrow x^2+1=0 \rightarrow x=\sqrt{-1}$ (no existe)

$Dom\ f = \mathbb{R}$

b) $y = \sqrt{3-9x} \rightarrow 3-9x \geq 0 \rightarrow -9x \geq -3 \rightarrow x \leq \dfrac{-3}{-9} \rightarrow x \leq \dfrac{1}{3}$

$Dom\ \ f = \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$

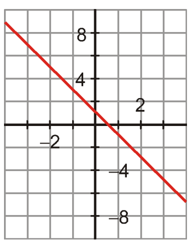
Ejercicio nº 15.-

Representa gráficamente la recta $y = -2x + 1$ y halla la ecuación de la recta con la misma pendiente que la anterior que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(-3, 0)$ y $B(1, -8)$.

Solución:

− Representamos la recta $y = -2x + 1$ haciendo una tabla de valores:

x	0	−2
y	1	5



– La pendiente de la recta $y = -2x + 1$ es $m = -2$.

Punto medio del segmento de extremos $A(-3, 0)$ y $B(1, -8)$:

$$x = \frac{-3+1}{2} = -2; \quad y = \frac{0-8}{2} = -4 \quad \rightarrow \quad P(-2, -4)$$

Ecuación de la recta de pendiente $m = -2$ que pasa por $P(-2, -4)$:

$y + 4 = -2(x + 2) \rightarrow y + 4 = -2x - 4 \rightarrow y = -2x - 8$ es la recta buscada.

Ejercicio nº 16.-

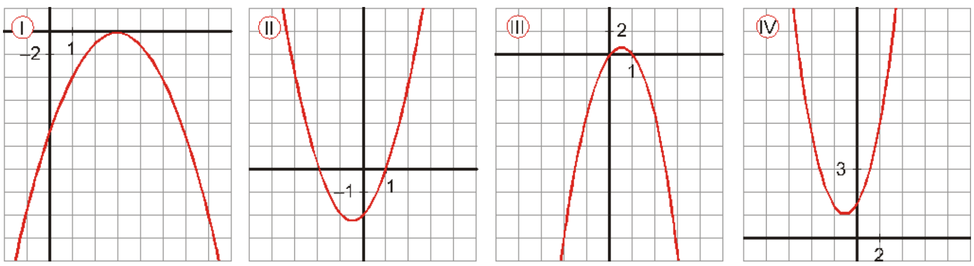
Asocia cada gráfica con su correspondiente expresión:

a) $\boldsymbol{y = -3x^2 + 3x}$

b) $\boldsymbol{y = -(x - 3)^2}$

c) $\boldsymbol{y = \frac{(x+1)^2}{2} + 1}$

d) $\boldsymbol{y = (x - 1)(x + 2)}$



Solución:

a) → III

b) → I

c) → IV

d) → II

Ejercicio nº 17.-

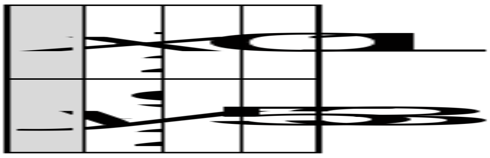
Representa esta función:

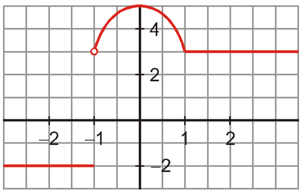
$$f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x\le -1\\ -2x^2+5 & \text{si } -1<x\le 1\\ 3 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Solución:

− El primer y el último tramo son las funciones constantes $y = -2$, $y = 3$ definidas para $x \le -1$ y $x > 1$, respectivamente.

− El segundo tramo es la parábola $y = -2x^2 + 5$ definida para -1 $x \le 1$. La representamos:





__Ejercicio nº 18.-__

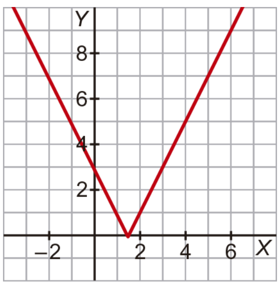
Representa las siguientes funciones:

a) $y = |2x - 3|$

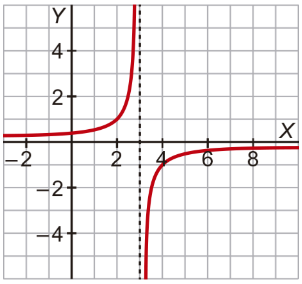
b) $y = -\dfrac{1}{x-3}$

Solución:

a)



b)



Ejercicio nº 19.-

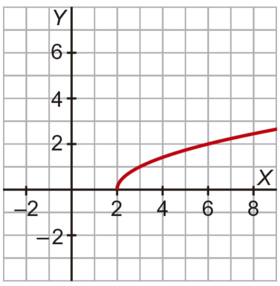
Representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x-2}$

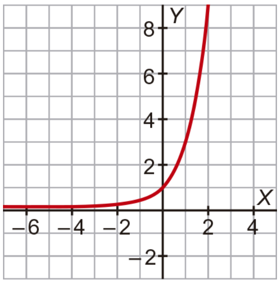
b) $y = 3^x$

Solución:

a)



b)



Ejercicio nº 20.-

Calcula *sen* α y *tg* α de un ángulo agudo, α, sabiendo que *cos* α = 0,6.

Solución:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + 0,6^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 1 - 0,36 \rightarrow sen^2\alpha = 0,64 \rightarrow$

$\rightarrow sen\ \alpha = 0,8$

Luego: $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{0,8}{0,6} = 1,\overset{\frown}{3} \quad \rightarrow \quad tg\ \alpha = 1,\overset{\frown}{3}$

Ejercicio nº 21.-

Calcula las razones trigonométricas de 227° a partir de las razones trigonométricas de 47°:

***sen* 47° = 0,73; *cos* 47° = 0,68; *tg* 47° = 1,07**

227° es un ángulo correspondiente al 3er cuadrante. Además, 180° + 47° = 227°, luego:

$sen\ 227° = -sen\ 47° \quad \rightarrow \quad sen\ 227° = -0{,}73$

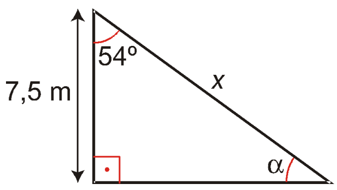
$cos\ 227° = -cos\ 47° \quad \rightarrow \quad cos\ 227° = -0{,}68$

$tg\ 227° = tg\ 47° \quad \rightarrow \quad tg\ 227° = 1{,}07$

Ejercicio nº 22.-

Un globo, sujeto al suelo por una cuerda, se encuentra a una altura de 7,5 m; entre la altura y la cuerda se forma un ángulo de 54°. Calcula la longitud de la cuerda y el ángulo que esta forma con el suelo.

Solución:



Llamamos: $x \rightarrow$ longitud de la cuerda

$\alpha \rightarrow$ ángulo entre la cuerda y el suelo

La razón trigonométrica a usar con los datos del problema es el coseno:

$$cos\ 54° = \frac{7{,}5}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{7{,}5}{cos\ 54°} \approx \frac{7{,}5}{0{,}59} \approx 12{,}71$$

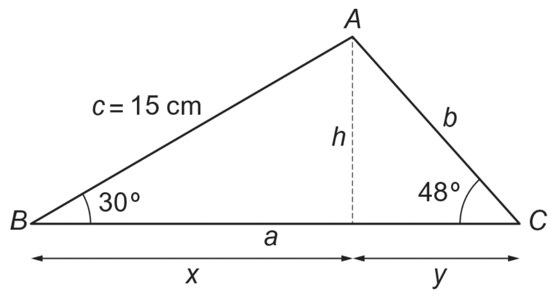
La cuerda tiene una longitud de 12,71 m.

Calculamos $\alpha \rightarrow 54° + 90° + \alpha = 180° \rightarrow \alpha = 36°$

Ejercicio nº 23.-

Para subir a una atracción de feria hay una escalera y una rampa. La rampa mide 15 m y los ángulos que forman la rampa y la escalera con el suelo son de 48º y 30º. Calcula la longitud de la escalera, la separación que existe entre ambos accesos y la altura entre el suelo y el punto donde coinciden, así como el ángulo que forman entre sí.

Solución:



$$\hat{A} = 180° - (48° + 30°) \rightarrow \hat{A} = 102°$$

$x = 15 \cdot \cos 30º \rightarrow x = 15 \cdot 0{,}866 \rightarrow x = 12{,}99$ m

$h = 15 \cdot \text{sen } 30º \rightarrow h = 15 \cdot 0{,}5 \rightarrow h = 7{,}5$ m

$$\frac{h}{y} = tg\ 48° \rightarrow y = \frac{h}{tg\ 48°} \rightarrow y = \frac{7{,}5}{1{,}11} \rightarrow y = 6{,}75 \text{ m}$$

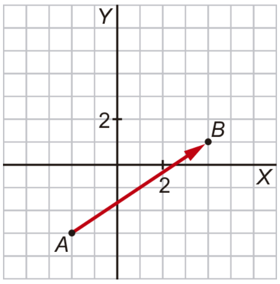
$$y = b \cdot \cos 48° \rightarrow b = \frac{y}{\cos 48°} \rightarrow b = \frac{6{,}75}{0{,}67} \rightarrow b = 10{,}07 \text{ m}$$

Ejercicio nº 24.-

Determina las coordenadas del vector que pasa por los puntos *A*(–2, –3) y *B* (4, 1), represéntalo en unos ejes cartesianos y calcula su módulo.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 1) - (-2, -3) = (6, 4)$$



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Ejercicio nº 25.-

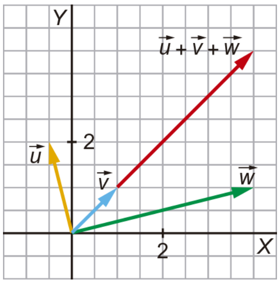
Dados los vectores $\vec{u}(-1, 2)$, $\vec{v}(1, 1)$ y $\vec{w}(4, 1)$, calcula analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

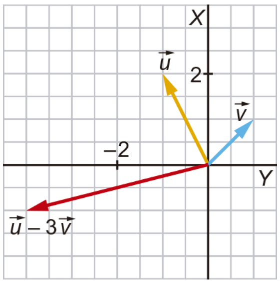
b) $\vec{u} - 3\vec{v}$

Solución:

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-1, 2) + (1, 1) + (4, 1) = (0, 3) + (4, 1) = (4, 4)$



b) $\vec{u}-3\vec{v}=(-1,2)-3(1,1)=(-1,2)+(-3,-3)=(-4,-1)$



Ejercicio nº 26.-

a) Escribe dos vectores que tengan la misma dirección, sentido contrario y módulo menor que $\vec{u}(-6,2)$.

b) Escribe tres vectores perpendiculares a $\vec{u}$.

Solución:

a) $\vec{v}=(3,-1)$ y $\vec{w}=\left(2,\frac{-2}{3}\right)$

Ejercicio nº 27.-

Halla el punto medio del segmento de extremos *A*(1, −4) y *B*(6, −8).

Solución:

Las coordenadas del punto medio, *M*, son la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$M=\left(\frac{1+6}{2},\frac{-4+(-8)}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},-6\right)$$

Ejercicio nº 28.-

Halla el simétrico, *P′*, del punto *P*(2, −4) respecto de *Q*(6, 3).

Solución:

Llamamos (x', y') a las coordenadas de P'. El punto medio del segmento de extremos *P y P′* es *Q*.

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2+x'}{2}=6\\[2mm]\dfrac{-4+y'}{2}=3\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x'=10\\y'=10\end{array}\right\} \rightarrow P'(10,10)$$

Ejercicio nº 29.-

Halla la distancia entre los puntos *A*(10, 15) y *B*(0, −9).

Solución:

$$dist\,(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(0-10)^2+(-9-15)^2} = \sqrt{10^2+24^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26$$

Ejercicio nº 30.-

a) Determina si los puntos *A*(2, –2), *B*(4, –6) y *C*(–3, 8) están alineados.

b) Halla *x* para que los puntos *P*(1, –3), *Q*(*x* – 3, 9) y *R*(2, –7) estén alineados.

Solución:

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 8) - (2, -2) = (-5, 10)$

$\frac{2}{-5} \neq \frac{-4}{10} \rightarrow A,\ B$ y C no están alineados.

b) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x - 3, 9) - (1, -3) = (x - 4, 12)$

$\overrightarrow{PR} = R - P = (2, -7) - (1, -3) = (1, -4)$

$\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tienen que ser proporcionales: $\frac{x-4}{1} = \frac{12}{-4} \rightarrow -4x + 16 = 12 \rightarrow x = 1$

<u>Ejercicio nº 31.-</u>

a) Escribe la ecuación de la recta, *r*, que pasa por los puntos (0, −2) y (−1, −5).

b) Obtén la ecuación de la recta, *s*, que pasa por (4, 0) y tiene pendiente −2.

c) Halla el punto de intersección de las rectas *r* y *s*.

Solución:

a) Pendiente $= \frac{-5-(-2)}{-1-0} = \frac{-5+2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$

Ecuación: $y = -2 + 3\,(x - 0) \rightarrow y = -2 + 3x \rightarrow 3x - y - 2 = 0$

b) $y = 0 - 2\,(x - 4) \rightarrow y = -2x + 8$

c) Es la solución del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y-2=0 \\ y=-2x+8 \end{array}\right\} \rightarrow 3x-(-2x+8)-2=0 \rightarrow 3x+2x-8-2=0 \rightarrow 5x=10 \rightarrow$$
$$\rightarrow x=2 \rightarrow y=4$$

Punto: (2, 4)

Ejercicio nº 32.-

a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por (2, 1) y es paralela a $y=\frac{1}{2}x+3$.

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por (0, −2) y es perpendicular a $2x+y=-3$.

Solución:

a) Si son paralelas, tienen la misma pendiente:

$$y=\frac{1}{2}x+3 \rightarrow m=\frac{1}{2}$$

b) Pendiente de $2x+y=-3 \rightarrow y=-2x-3 \rightarrow m=-2$

Pendiente de la perpendicular $=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

Ecuación: $y=-2+\frac{1}{2}x \quad \rightarrow \quad 2y=-4+x \quad \rightarrow \quad x-2y-4=0$

Ejercicio nº 33.-

Determina analítica y gráficamente la posición relativa de las siguientes rectas:

***r* : pasa por los puntos *A*(–2, 4) y *B*(–3, 2).**

$$s:\begin{cases} \boldsymbol{x=-1+t} \\ \boldsymbol{y=1-3t} \end{cases}$$

Solución:

Un vector dirección de r es $\overrightarrow{AB}=B-A=(-3,2)-(-2,4)=(-1,-2)$.

Su pendiente es $m=\frac{-2}{-1}=2.$

$r: y=2+2(x+3) \rightarrow y=2+2x+6 \rightarrow y=2x+8$

$$s:\begin{cases} x=-1+t \\ y=1-3t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=x+1 \\ t=\frac{y-1}{-3} \end{cases} \rightarrow x+1=\frac{y-1}{-3} \rightarrow$$

$\rightarrow -3(x+1)=y-1 \rightarrow -3x-3=y-1 \rightarrow y=-3x-2$

Resolvemos el sistema formado por las dos rectas.

$$\begin{cases} y = 2x + 8 \\ y = -3x - 2 \end{cases} \rightarrow \ 2x + 8 = -3x - 2 \ \rightarrow \ 5x = -10 \ \rightarrow \ x = -2$$

$$\rightarrow \ y = -3(-2) = 6 - 2 = 4$$

Las rectas se cortan en el punto (–2, 4).